PART2　3本の接線が引けるための条件

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に3本の接線が引けるための a，b の満たすべき条件を求めよ。また，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

Point Pickup

3次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。

3次方程式 $f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつ

$\iff$ 3次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と3点で交わる

$\iff$ 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもち，(極大値) >0 かつ (極小値) <0

$\iff$ (極大値) $\times$ (極小値) <0

第16講　PART2　確認問題

1　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=-x^3+x$ に3本の接線が引けるための $a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$a,\ b$ の満たすべき条件　［ア］

点 $(a,\ b)$ の存在範囲　［イ］（境界は含まない）

[［ア］の選択肢]

① $a-b>0$ かつ $-a^3+a-b<0$

② $a-b<0$ かつ $-a^3+a-b<0$

③ $(a-b)(-a^3+a-b)<0$

④ $(a-b)(-a^3+a-b)>0$

⑤ $a+b>0$ かつ $-a^3+a+b<0$

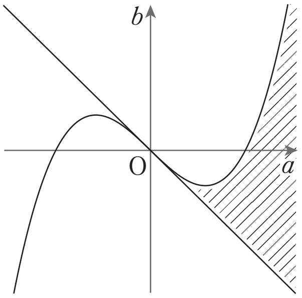
⑥ $a+b>0$ かつ $-a^3+a+b>0$

⑦ $(a+b)(-a^3+a+b)<0$

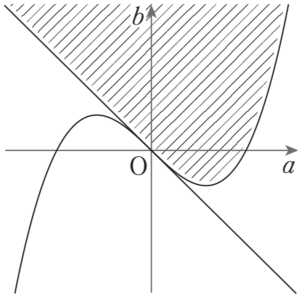
⑧ $(a+b)(-a^3+a+b)>0$

[イ の選択肢]

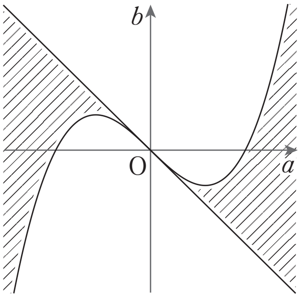
①



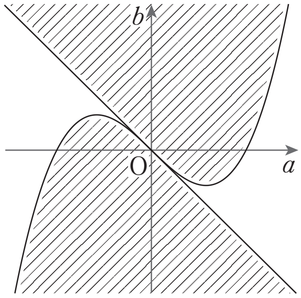
②



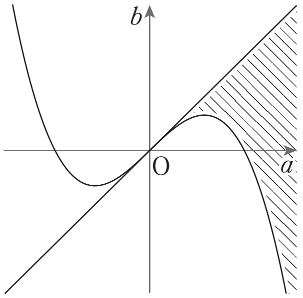
③



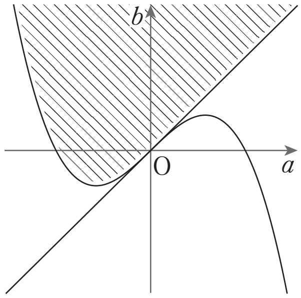
④



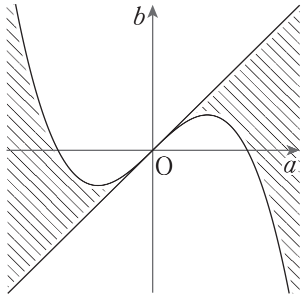
⑤



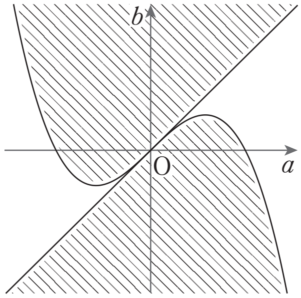
⑥



⑦



⑧



[MEMO]

PART2　3 本の接線が引けるための条件

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に 3 本の接線が引けるための $a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ。また，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

$y=x^3-3x$ より　$y'=3x^2-3$

よって，曲線上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t \quad \text{すなわち} \quad y=(3t^2-3)x-2t^3 \cdots\cdots ①$$

①が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=(3t^2-3)a-2t^3 \qquad \text{すなわち} \quad 2t^3-3at^2+3a+b=0 \cdots\cdots ②$$

3 次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。

よって，点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に 3 本の接線が引けるための条件は，t の 3 次方程式②が異なる 3 つの実数解をもつことである。

したがって，$f(t)=2t^3-3at^2+3a+b$ とおくと，

$f(t)$ の(極大値)×(極小値)<0 となるときである。

$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき　$f'(t)=6t^2\geqq 0$ より $f(t)$ は単調増加である。

　よって　3 次方程式②の実数解は 1 つで，不適。

$a\neq 0$ のとき　$f(t)$ は 2 つの極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ。

　よって　$f(0)f(a)<0$ より

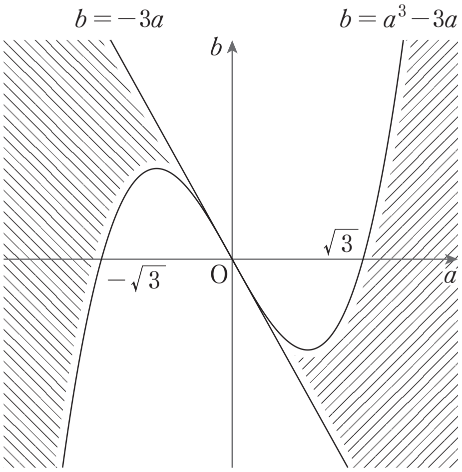
$$(3a+b)(-a^3+3a+b)<0$$

すなわち　$\begin{cases} 3a+b>0 \\ -a^3+3a+b<0 \end{cases}$

または　$\begin{cases} 3a+b<0 \\ -a^3+3a+b>0 \end{cases}$

つまり　$\begin{cases} b>-3a \\ b<a^3-3a \end{cases}$　または　$\begin{cases} b<-3a \\ b>a^3-3a \end{cases}$

したがって，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図斜線部分(境界は含まない)。



第16講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：⑦

[解説]

$y=-x^3+x$ より

$$y'=-3x^2+1$$

よって，曲線上の点 $(t,\ -t^3+t)$ における接線の方程式は

$$y=(-3t^2+1)(x-t)-t^3+t$$ [A]

すなわち

$$y=(-3t^2+1)x+2t^3$$

この接線が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=(-3t^2+1)a+2t^3$$

すなわち

$$2t^3-3at^2+a-b=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

3 次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。 [B]

よって，点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=-x^3+x$ に 3 本の接線が引けるための条件は，t の 3 次方程式$(*)$が異なる 3 つの実数解をもつことである。

したがって，

$$f(t)=2t^3-3at^2+a-b$$

とすると，$f(t)$ は極値をもち，

$$(\text{極大値})\times(\text{極小値})<0 \quad \cdots\cdots(**)$$ [C]

となる。

ここで　$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき

$$f'(t)=6t^2\geqq 0$$

であるから $f(t)$ は単調増加する。

> [A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
> $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

> [B]　3 次関数のグラフにおいては接点が異なれば接線も異なる。接線の本数は接点の個数（すなわち，3 次方程式（$*$）の実数解の個数）と一致する。

> [C]
> 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ
> $\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と 3 点で交わる
> $\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ が極値をもち，(極大値) >0 かつ (極小値) <0
> $\Longleftrightarrow$ (極大値) $\times$ (極小値) <0

よって，3 次方程式(＊)すなわち $2t^3-b=0$ の実数解は 1 つであるから，不適。

$a \neq 0$ のとき

$f'(t)=0$ とすると，$6t(t-a)=0$ より，$t=0$，a であるから，$f(t)$ は 2 つの極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ。

ゆえに，(＊＊)より　$f(0)f(a)<0$

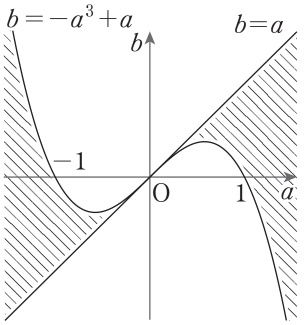
よって，求める a，b の条件は

$$\boldsymbol{(a-b)(-a^3+a-b)<0}$$

ゆえに

$$\begin{cases} a-b>0 \\ -a^3+a-b<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a-b<0 \\ -a^3+a-b>0 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} b<a \\ b>-a^3+a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b>a \\ b<-a^3+a \end{cases}$$

したがって，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は次図斜線部分(境界は含まない)。